Kontekst. W moich badaniach pytam, jakie własności problemów obliczeniowych odróżniają te z nich, które umiemy efektywnie rozwiązywać, od tych, które wciąż są dla nas trudne. Klasyczna teoria NP-zupełności odpowiada na to pytanie pod warunkiem, że *efektywnie* znaczy dla nas *w czasie wielomianowym*, ale nie pozwala wytłumaczyć różnicy pomiędzy np. czasem liniowym a kwadratowym. Moje badania wpisują się w problematykę *fine-grained complexity*, dynamicznie rozwijającą się w ostatnich latach.

Na kompleksową klasyfikację własności, sprawiających że dane problemy wymagają np. czasu kwadratowego, nie mamy na razie co liczyć. W moich badaniach skupiam się więc na pośrednich celach. Z jednej strony, badam dolne i górne ograniczenia złożoności czasowej konkretnych problemów obliczeniowych – w celu powiększenia zbioru przykładów, z których będzie można wyciągać bardziej ogólne wnioski. Z drugiej strony, staram się szukać wyczerpujących klasyfikacji chociaż dla ograniczonych klas problemów.

Jak dotąd wciąż nie mamy narzędzi pozwalających dowodzić nietrywialne bezwarunkowe ograniczenia dolne złożoności czasowej. Z tego powodu w dziedzinie *fine-grained complexity* uciekamy się do ograniczeń warunkowych, dowodzonych poprzez redukcje – najczęściej z dobrze zbadanych problemów, powszechnie uważanych za trudne.

W zależności od wyboru problemu, z którego redukujemy, ograniczeń dolnych tego typu nie należy traktować jako ostatecznych dowodów na nieistnienie szybkich algorytmów – wszak zakładane hipotezy mogą okazać się nieprawdziwe. Ograniczenia te wskazują natomiast na konkretne źródła trudności rozważanych problemów i dowodzą, że postęp w tych problemach jest niemożliwy bez postępu w innych, często bardzo odległych. Ponadto, badanie redukcji często prowadzi do lepszego zrozumienia struktury kombinatorycznej obecnej w problemach obliczeniowych.

Klasa równoważności. We współpracy z Lechem Durajem, Krzysztofem Kleinerem oraz Virginią Vassilevską Williams [9] zdefiniowaliśmy naturalną klasę problemów zapytań na przedziałach (zawierającą m.in. problem zapytań o liczbę inwersji) i wykazaliśmy, poprzez cykle redukcji, że wszystkie problemy w tej klasie mają taką samą złożoność, z dokładnością do czynników polilogarytmicznych.

Udowodniliśmy również, że problemy te – w wariancie offline i przy liniowej liczbie zapytań – są czasowo równoważne problemowi wyznaczania dla każdej krawędzi liczby trójkątów w grafach rzadkich. Problem ten da się rozwiązywać w czasie $\widetilde{\mathcal{O}}(m^{2\omega/(\omega+1)}) \leqslant \mathcal{O}(m^{1.41})$ [4], gdzie $\omega < 2.373$ to wykładnik złożoności mnożenia macierzy [3]. W efekcie pozwoliło nam to uzyskać poprawę w stosunku do poprzednich algorytmów, działających w czasie $\widetilde{\mathcal{O}}(n^{1.5})$, dla wszystkich problemów w naszej klasie.

Badane problemy stanowią pierwszą klasę równoważności z tym osobliwym ograniczeniem złożoności czasowej. Nasz wynik jest również pierwszą równoważnością dla problemu dotyczącego trójkątów w grafach rzadkich i jedną z pierwszych dla grafów rzadkich w ogólności [2, 8].

Klasyfikacja. Mnożenie macierzy można uznać za problem *łatwy* – potrafimy go rozwiązać w czasie $\widetilde{\mathcal{O}}(n^{\omega}) \leqslant \mathcal{O}(n^{2.373})$, czyli znacznie szybciej niż naiwnym algorytmem sześciennym. Z drugiej strony, obliczanie iloczynu macierzy nad półpierścieniem tropikalnym $(\min, +)$ jest *trudne* – popularna Hipoteza APSP głosi, że wymaga to czasu $n^{3-o(1)}$.

Istnieje wiele przykładów *pośrednich* produktów macierzy nad różnymi strukturami algebraicznymi, np. $(\min, \max)$ czy $(+, =)$, oraz związanych z nimi problemów grafowych. Wszystkie te problemy pośrednie potrafimy rozwiązać w czasie $\widetilde{\mathcal{O}}(n^{2.5})$, jeśli $\omega = 2$. Mimo że algorytmy dla tych problemów są bardzo do siebie podobne, znamy niewiele formalnych związków pomiędzy nimi. Czy te identyczne złożoności czasowe są przypadkiem, czy też da się je wyjaśnić redukując jedne problemy pośrednie do innych?

Analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku *konwolucji*. Dzięki szybkiej transformacie Fouriera, $(+, \cdot)$-konwolucję potrafimy wyznaczyć w czasie $\mathcal{O}(n \log n)$. Z drugiej strony, $(\min, +)$-konwolucja wydaje się wymagać czasu kwadratowego [7]. Znane są też analogiczne problemy pośrednie – wszystkie je potrafimy rozwiązać w czasie $\widetilde{\mathcal{O}}(n^{1.5})$, ale nie potrafimy formalnie wyjaśnić tego zbiegu okoliczności.

We współpracy z Andreą Lincoln i Virginią Vassilevską Williams [13] przedstawiliśmy kilka redukcji pomiędzy problemami pośrednimi oraz innymi popularnymi problemami z dziedziny *fine-grained complexity*. Na przykład, wykazaliśmy, że najkrótsze ścieżki pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków w grafie skierowanym bez wag da się wyznaczyć co najmniej tak szybko, jak szybko można znaleźć monochromatyczne trójkąty w grafie pokolorowanym krawędziowo.

Zdefiniowaliśmy również naturalny konwolucyjny wariant wyżej wspomnianego problemu trójkątów monochromatycznych, *konwolucję monochromatyczną*. Udowodniliśmy, że da się ją wyznaczyć w czasie $\widetilde{\mathcal{O}}(n^{1.5})$ (czyli jest pośrednim problemem konwolucyjnym), oraz że jakakolwiek wielomianowa poprawa tego czasu działania automatycznie pociąga za sobą poprawę kwadratowej złożoności znanego problemu 3SUM i *vice versa*. Jest to przykład *równoważności* (w sensie *fine-grained*) pomiędzy problemami o *różnych* złożonościach czasowych. Co więcej, wynik ten można interpretować jako wskazówkę, że trudność problemu 3SUM nie wynika ze struktury addytywnej, której bezpośrednio dotyczy.

Z kolei we współpracy z Yuzhou Gu, Virginią Vassilevską Williams i Yinzhanem Xu [12] opracowaliśmy algorytm dla problemu ścieżek zamiennych z jednego źródła w grafach z ujemnymi wagami działający w czasie $\mathcal{O}(n^{2.4957})$, wykazując tym samym, że problem, który uważany był za problem pośredni [11], jednak nim nie jest.

Konkretny przykład. Razem z Lechem Durajem i Marvinem Künnemannem [10] udowodniliśmy, że problemu Najdłuższego Wspólnego Podciągu Rosnącego (LCIS) nie da się rozwiązać w czasie silnie podkwadratowym, czyli $O(n^{2-\varepsilon})$, o ile prawdziwa jest Silna Hipoteza Czasu Wykładniczego (SETH).

LCIS jest jednym z wariantów klasycznego problemu Najdłuższego Wspólnego Podciągu (LCS). Oba te problemy da się rozwiązać w czasie kwadratowym prostym programowaniem dynamicznym. Kwadratowe ograniczenia dolne dla LCS [1, 6], oparte o SETH, są jednymi z najbardziej znanych wyników w dziedzinie *fine-grained complexity*. LCIS to intrygujący problem, ponieważ jest jedynym wariantem LCS, dla którego choć nie znamy algorytmu podkwadratowego, to jego trudność nie wynika z *alignment gadget framework* [6], czyli ogólnej techniki, która ujednolica wszystkie dotychczasowe wyniki tego typu.

Znamy coraz więcej problemów, dla których naturalne algorytmy oparte o programowanie dynamiczne okazują się być (warunkowo) optymalne. Jakie strukturalnych własności programów dynamicznych pozwalają na takie ścisłe ograniczenia dolne? LCIS był jednym z przykładów, które musieliśmy zrozumieć, by móc myśleć o klasyfikacji takich własności.

Algorytmy online. Od czasu do czasu pracuję również nad algorytmami online, czyli takimi, które muszą podejmować częściowe decyzje zanim dostępne będą wszystkie dane wejściowe. Powstała we współpracy z Antoniosem Antoniadisem, Christianem Coesterem, Markiem Eliášem i Bertrandem Simonem praca [5] wpisuje się w rozwijany od kilku lat paradygmat algorytmów wspomaganych uczeniem maszynowym (*learning-augmented algorithms*).

W paradygmacie tym algorytm online ma dostęp do potencjalnie omylnej *wyroczni* (np. modelu uczenia maszynowego), która stara się przewidzieć przyszłe zapytania i udzielić wskazówek. Celem jest równoczesne zagwarantowanie *zgodności* – czyli stałego współczynnika kompetytywności, gdy wyrocznia jest bezbłędna – oraz *odporności* – czyli co najwyżej stałej straty w stosunku do najlepszego klasycznego algorytmu online niezależnie od błędów wyroczni.

Jeden z artykułów, które zapoczątkowały ten nurt, dotyczy problemu stronnicowania [14]. Autorzy wykorzystują przewidywania dotyczące czasu następnego pojawienia się aktualnego zapytania i osiągają odporność i zgodność z zaledwie logarytmiczną zależnością od błędu przewidywań. Ich podejście nie uogólnia się jednak na inne problemy online. W szczególności, wykazaliśmy, że już dla ważonego problemu stronnicowania nawet z nieomylną wyrocznią tego typu nie da się uzyskać lepszego współczynnika kompetytywności niż najlepszy znany klasyczny algorytm online (bez wyroczni).

W [5] zaproponowaliśmy rozwiązanie tego mankamentu. Najpierw zdefiniowaliśmy ogólny typ wyroczni dla *metrycznych systemów zadań* – szerokiej klasy problemów online, zawierającej m.in. stronnicowanie, ale również problemy *k-server* czy *convex body chasing*. Następnie zaproponowaliśmy ogólny algorytm, wykorzystujący taką wyrocznię, który osiąga odporność i zgodność, z liniową zależnością od błędu przewidywań. Ponadto, dla problemu stronnicowania opracowaliśmy wyspecjalizowany algorytm osiągający logarytmiczną zależność od błędu wyroczni naszego typu.

Literatura

[1] Amir Abboud, Arturs Backurs, and Virginia Vassilevska Williams. Tight hardness results for LCS and other sequence similarity measures. In *IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2015*, pages 59–78, 2015.

[2] Udit Agarwal and Vijaya Ramachandran. Fine-grained complexity for sparse graphs. In *Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, STOC 2018*, pages 239–252, 2018.

[3] Josh Alman and Virginia Vassilevska Williams. A refined laser method and faster matrix multiplication. In *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2021*, pages 522–539, 2021.

[4] Noga Alon, Raphael Yuster, and Uri Zwick. Finding and counting given length cycles. *Algorithmica*, 17(3):209–223, 1997.

[5] Antonios Antoniadis, Christian Coester, Marek Eliás, Adam Polak, and Bertrand Simon. Online metric algorithms with untrusted predictions. In *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning, ICML 2020*, pages 345–355, 2020.

[6] Karl Bringmann and Marvin Künnemann. Quadratic conditional lower bounds for string problems and dynamic time warping. In *IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2015*, pages 79–97, 2015.

[7] Marek Cygan, Marcin Mucha, Karol Wegrzycki, and Michal Wlodarczyk. On problems equivalent to (min,+)-convolution. In *44th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2017)*, pages 22:1–22:15, 2017.

[8] Bartłomiej Dudek and Paweł Gawrychowski. Computing quartet distance is equivalent to counting 4-cycles. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, STOC 2019*, pages 733–743, 2019.

[9] Lech Duraj, Krzysztof Kleiner, Adam Polak, and Virginia Vassilevska Williams. Equivalences between triangle and range query problems. In *Proceedings of the 2020 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2020*, pages 30–47, 2020.

[10] Lech Duraj, Marvin Künnemann, and Adam Polak. Tight conditional lower bounds for longest common increasing subsequence. In *12th International Symposium on Parameterized and Exact Computation, IPEC 2017*, pages 15:1–15:13, 2017.

[11] Fabrizio Grandoni and Virginia Vassilevska Williams. Improved distance sensitivity oracles via fast single-source replacement paths. In *53rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2012*, pages 748–757, 2012.

[12] Yuzhou Gu, Adam Polak, Virginia Vassilevska Williams, and Yinzhan Xu. Faster monotone min-plus product, range mode, and single source replacement paths. In *48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, ICALP 2021*, 2021.

[13] Andrea Lincoln, Adam Polak, and Virginia Vassilevska Williams. Monochromatic triangles, intermediate matrix products, and convolutions. In *11th Innovations in Theoretical Computer Science Conference, ITCS 2020*, volume 151, pages 53:1–53:18, 2020.

[14] Thodoris Lykouris and Sergei Vassilvitskii. Competitive caching with machine learned advice. In *Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning, ICML 2018*, pages 3302–3311, 2018.